



Заключительный тур

28 марта 2021 года

10 класс

▷ 1. На какую цифру оканчивается сумма 2021-х степеней всех четырёхзначных чисел, получающихся из числа 1921 перестановкой его цифр?

▷ 2. Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Сколько существует подмножеств $C \subset A$ таких, что $C \cap B \neq \emptyset$?

▷ 3. Дан отрезок длиной 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$.

▷ 4. Сколько натуральных решений имеет система неравенств

$$1921 \leq a_{2000} \leq 2021,$$

где $a_k = \frac{n}{2+a_{k-1}}$, $a_1 = \frac{n}{1+\sqrt{1+n}}$.

▷ 5. Дан правильный семиугольник с последовательными вершинами

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Вычислить, чему равно выражение $\cos \alpha (\cos \alpha - 1) (2 \cos \alpha + 1)$, где $\alpha = \angle A_2A_1A_3$.

▷ 6. Последовательность a_n имеет вид

$$1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, \dots$$

где за единицей следует два последовательных чётных числа, потом три последовательных нечётных, потом четыре чётных и т.д. Найдите $a_{2021} - a_{1921}$.

▷ 7. Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\left(\sqrt{8} \cos 25^\circ - 1\right) \operatorname{tg} x^\circ = \left(\sqrt{8} \sin 25^\circ - 1\right) \operatorname{tg} 3x^\circ,$$

принадлежащих отрезку $[-1921^\circ; 2021^\circ]$.

▷ 8. Пусть m_a , m_b – длины медиан, проведённых к катетам прямоугольного треугольника, а r – радиус вписанного круга. Найдите все значения, которые может принимать отношение $d = \frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2}$.

▷ 9. Найдите все натуральные решения уравнения

$$19x^2y^2 + 21(x^2y + 1) = 19x(x^2y + 1)$$

▷ 10. Робот записывает квадраты всех натуральных чисел из промежутка $[a, b]$ последовательно в случайном порядке. Какова вероятность того, что полученное многозначное число является точным квадратом, если: а) $a = 3$, $b = 4$, б) $a = 1921$, $b = 2021$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!